Ex.21 证明. (反证法) 假设向量$\alpha_1+\alpha_2$ 是属于矩阵A 的特征值λ 的特征向量, 那么,

$$A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2).$$

另一方面,

$$A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2.$$

于是,

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=\lambda(\alpha_1+\alpha_2)\Rightarrow(\lambda-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda-\lambda_2)\alpha_2=0.$$

由于向量α_1,α_2 是属于矩阵A 的两个不同特征值的特征向量, 所以, 它们是线性无关的, 从而,

$$\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0\Rightarrow\lambda=\lambda_1=\lambda_2.$$

这与$\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾. 由此结论得证.